Intégrale de la gaussienne *via* les résidus

[J'ai piqué le développement de Owen sur Agreg-maths]

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Posons $a \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ une racine carrée de $i\pi$, $g : z \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-2az}$, et $f : z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}/g(z)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
g(z) = 0 &\iff \mathrm{e}^{-2az} = -1 = \mathrm{e}^{i\pi} \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ -2az = i\pi + 2ik\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ +2az = (2k+1)i\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ z = \frac{(2k+1)i\pi}{2a} = \frac{(2k+1)i\pi\overline{a}}{a\overline{a}} = \frac{(2k+1)\pi}{2\pi}i\overline{a} \\
&\iff z \in \left\{ \frac{2k+1}{2}a \ :\ k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$g(a+z) = 1 + \mathrm{e}^{-2a(a+z)} = 1 + \mathrm{e}^{-2a^2}\mathrm{e}^{-2az} = 1 + \mathrm{e}^{-2i\pi}\mathrm{e}^{-2az} = 1 + \mathrm{e}^{-2az} = g(z)$$

donc :

$$f(z) - f(a+z) = \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{g(z)} - \frac{\mathrm{e}^{-(z+a)^2}}{g(z+a)} = \frac{\mathrm{e}^{-z^2} - \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{a^2}\mathrm{e}^{-2az}}{g(z)} = \frac{\mathrm{e}^{-z^2} + \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{-2az}}{g(z)} = \mathrm{e}^{-z^2}\frac{1 + \mathrm{e}^{-2az}}{g(z)} = \mathrm{e}^{-z^2}$$

Considérons le lacet γ suivant :

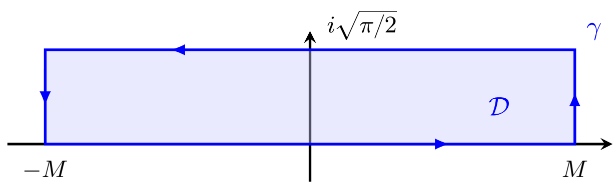

Figure 6.1 – Chemin pour intégrer

On note $\mathcal{D}$ l'intérieur de ce lacet. Remarquons que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{2k+1}{2}a \in \mathcal{D} \iff 0 \leqslant \operatorname{Im}\left(\frac{2k+1}{2}a\right) = \frac{2k+1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \iff 0 \leqslant \frac{2k+1}{2} \leqslant 1 \iff k = 0$$

donc le seul pôle de f dans $\mathcal{D}$ est $a/2$, donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_\gamma f = 2i\pi \operatorname{Res}_f(a/2)$$

Or g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc analytique, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g^{(n)}(z) = (-2a)^n \mathrm{e}^{-2az}$ donc $g^{(n)}(a/2) = -(-2a)^n$, donc :

$$\begin{aligned} g(z) &= g(a/2) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{g^{(n)}(a/2)}{n!}\left(z-\frac{a}{2}\right)^n = 0 - \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-2a)^n}{n!}\left(z-\frac{a}{2}\right)^n \\ &= 2a\left(z-\frac{a}{2}\right) + \left(z-\frac{a}{2}\right)^2 h(z) \end{aligned}$$

(avec h continue) donc :

$$\left(z-\frac{a}{2}\right) f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}\frac{z-\frac{a}{2}}{g(z)} = \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{2a + \left(z-\frac{a}{2}\right)h(z)} \xrightarrow[z\to a/2]{} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4}}}{2a} = \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}$$

On en déduit que $2i\pi \mathrm{Res}_f(a/2) = 2i\pi\dfrac{-i}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$.

Reste à traiter l'intégrale de chemin. Pour cela, on paramètre les quarte côtés du rectangle :

$$\int_\gamma f = \underbrace{\int_{-M}^{M} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\overset{\text{def}}{=} I_1(M)} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi/2}} if(M+ti)\ \mathrm{d}t}_{\overset{\text{def}}{=} I_2(M)} - \underbrace{\int_{-M}^{M} f\left(t+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\ \mathrm{d}t}_{\overset{\text{def}}{=} I_3(M)} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi/2}} if(-M+ti)\ \mathrm{d}t}_{\overset{\text{def}}{=} I_4(M)}$$

(Remarque : les quatre items suivants peuvent ne pas être présentés au tableau, d'une part parce qu'ils ne sont pas très intéressants, et d'autre part parce que la preuve serait trop longue sinon. On peut néanmoins présenter le premier point qui justifie l'hypothèse $M > \sqrt{\pi}$.)

Supposons que $M > \sqrt{\pi}$.

- Il existe $\alpha > 0$ ne dépendant pas de M tel que $\forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ |g(M+it)| \geqslant \alpha$: en effet,

$$\begin{aligned} |g(M+it)| &\geqslant 1 - \left|\mathrm{e}^{-2a(M+it)}\right| = 1 - \mathrm{e}^{-2M\sqrt{\pi}/\sqrt{2} - 2t\sqrt{\pi}/\sqrt{2}} \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}(M-t)} \\ &\geqslant 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}(\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi/2})} = 1 - \mathrm{e}^{-\pi(\sqrt{2}-1)} > 0 \end{aligned}$$

- Quitte à réduire α, on peut également montrer que $\forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ |g(-M+it)| \geqslant \alpha$
- Il existe $\beta > 0$ ne dépendant pas de M tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ |g(t)| = |g(t+a)| \geqslant \beta$: en effet,

$$g(t+a) = g(t) = 1 + \mathrm{e}^{-2at} = 1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}(1+i)t} = 1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}t}\mathrm{e}^{-i\sqrt{2\pi}t}$$

  - Si $|\sqrt{2\pi}t| \leqslant \pi/2$, alors : $|g(t)| \geqslant |\mathrm{Re}(g(t))| = |1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}t}\underbrace{\cos(\sqrt{2\pi}t)}_{\geqslant 0}| \geqslant 1 > 0$
  - Sinon, $|g(t)| = |1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}t}\mathrm{e}^{-i\sqrt{2\pi}t}| \geqslant ||1| - |\mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}t}\mathrm{e}^{-i\sqrt{2\pi}t}|| \geqslant |1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{2\pi}t}| \geqslant |1 - \mathrm{e}^{\pm\pi/2}| > 0$

Grâce aux deux premiers points, on peut majorer les intégrandes de $I_2(M)$ et $I_4(M)$ par une fonction intégrable sur $]0, \sqrt{\pi/2}[$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{M\to+\infty} I_2(M) = \lim\limits_{M\to+\infty} I_4(M) = 0$.

Grâce au dernier point, on peut passer $I_1(M)$ et $I_3(M)$ à la limite quand $M \to +\infty$ sans souci (note : il faut prendre quelque précautions, car $I_3(M)$ intègre une fonction dont la variable est complexe). Finalement,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \lim_{M\to+\infty} I_2(M) - I_4(M) + I_1(M) - I_3(M) \\ &= \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{-M}^{M} f\left(t + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{-M-\sqrt{\pi/2}}^{M-\sqrt{\pi/2}} f(t+a)\ \mathrm{d}t \qquad (*) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) - f(t+a) \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

($(*)$: on effectue le changement de variable $u = t - \sqrt{\pi/2}$, qui donne $t + i\sqrt{\pi/2} = u + (1+i)\sqrt{\pi/2} = u + \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sqrt{\pi/2} = u\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i\pi/4} = u + a$.) $\square$

- Recasages : 236 (Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales), 245 (Fonction d'une variable complexe. Applications.)